ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Παρασκευή 11-9-2015

1. (Μόρια 15) Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$
   (α΄) Δείξτε ότι ο πίνακας AA^t είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

   (β΄) Υπολογίστε την ορίζουσα του A^tA. Είναι ο πίνακας αυτός αντιστρέψιμος;

   (γ΄) Βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με μη μηδενικές στήλες ώστε $AB = \mathbb{O}_{2\times 3}$.

2. (Μόρια 15) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 + ax_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - ax_4 &= -1 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$
   για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

3. (Μόρια 25) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση: $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ που ορίζεται ως εξής
$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b + c)x^2 + (2a + 2b)x + (a + b - c).$$
   Να υπολογιστούν:

   (α΄) μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T,

   (β΄) ο πίνακας A της T στη διατεταγμένη βάση $x^2, 1, x$ του $\mathbb{R}_2[x]$,

   (γ΄) αντιστρέψιμοι πίνακες $P, Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έτσι ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ για κάποιον ακέραιο r.

4. (Μόρια 15) Στο $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τον υπόχωρο του
$$V = \{(r, -2r + 2t + 2s, -3r + 3t + 3s, 4r) | r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$
   Βρείτε υπόχωρο W του $\mathbb{R}^4$ ώστε $V \cap W = < (1, 2, 3, 4) >$ και $V + W = \mathbb{R}^4$.

5. (Μόρια 15) Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ υπάρχουν το πολύ δύο τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $A + \lambda I_2$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

6. (Μόρια 15) Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
   Εκφράστε τον αντίστροφο του A σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Καλή επιτυχία.